

Préambule

Ce document est une proposition de correction d'épreuve du CAPES externe de physique-chimie. Il ne doit pas être considéré comme un modèle de copie à rendre mais plutôt comme une aide à la correction.

Il est possible que quelques erreurs se soient glissées dans cette version. Si vous pensez en avoir trouvé une, merci de me contacter via l'adresse phy-chim@laposte.net ou en flashant le QR-code suivant ;



Si vous appréciez la qualité de ce document vous pouvez me soutenir en effectuant un don en cliquant [ICI](#) ou en flashant le QR-code ci-dessous :



Ce document est mis à disposition gratuitement selon les termes de la Licence Creative Commons : Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International.



Table des matières

2015 – COMPOSITION : VERS UNE « TERRE EXTRASOLAIRE »

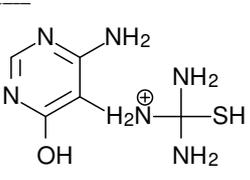
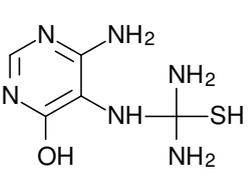
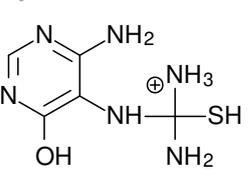
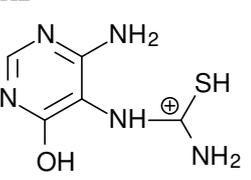
1. Analyse de la composition chimique des météorites.....	1
2. Décomposition de la lumière des étoiles.....	2
3. Réalisation d'un spectre à l'aide d'un réseau de diffraction.....	4
3.1. Diffraction par une fente	
3.2. Utilisation d'un réseau par transmission	
3.3. Le spectrographe de l'observatoire de Haute Provence	
4. Analyse du spectre d'absorption des étoiles.....	6
4.1. Effet Doppler	
4.2. Analyse du mouvement d'un système à deux corps	
4.3. Détection de la première planète extrasolaire par la méthode des vitesses radiales	
4.4. Étude du système planétaire HD134987	
5. Étude cinétique de la formation de molécules prébiotiques.....	10
6. Des planètes habitables ?.....	11

2015 – COMPOSITION :

VERS UNE « TERRE EXTRASOLAIRE »

1. Analyse de la composition chimique des météorites

- La formule brute de (III.b) est NH_3 le nombre stœchiométrique associé est 2.
-

A+	B	C+	D+
			

- La masse molaire globale du produit que l'on souhaite récupérer est :

$$\begin{aligned}
 M_{\text{tot}} &= 5 \times M(\text{C}) + 9 \times M(\text{H}) + 6 \times M(\text{N}) + M(\text{Cl}) + M(\text{O}) \\
 &= 5 \times 12,0 + 9 \times 1,00 + 6 \times 14,0 + 35,5 + 16,0 \\
 &= 204,5 \text{ g.mol}^{-1}
 \end{aligned}$$

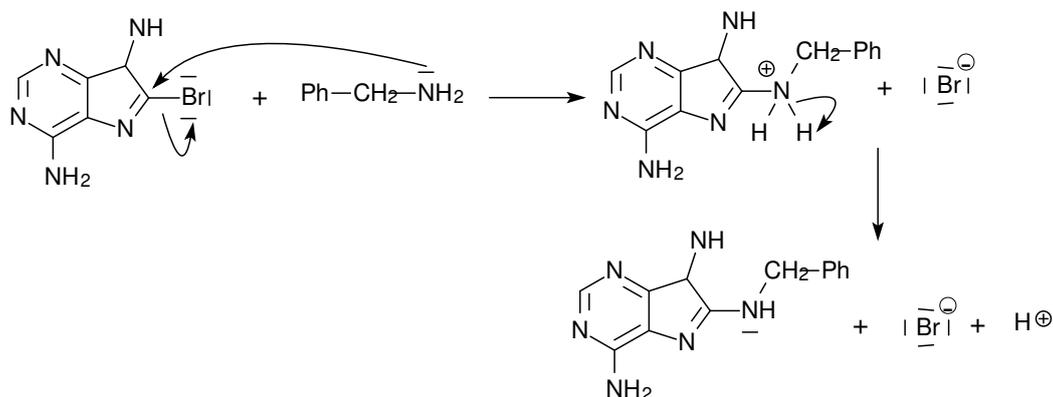
Le pourcentage massique en chacun des constituants se calcule comme suit :

$$\%_m(i) = \frac{m(i)}{m_{\text{tot}}} = \frac{n(i) \times M(i)}{M_{\text{tot}}}$$

Ainsi : $\%_m(\text{C}) = \frac{5 \times 12,0}{204,5} = 29,3\%$, $\%_m(\text{Cl}) = 17,4\%$, $\%_m(\text{H}) = 4,40\%$, $\%_m(\text{N}) = 41,1\%$

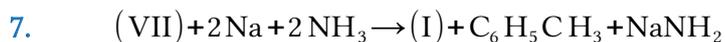
Ces valeurs sont conformes à celles de l'analyse quantitative, le produit est pur.

-

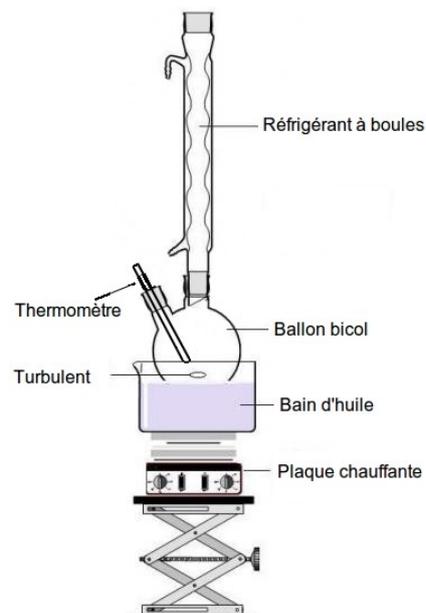


5. Cette première étape peut être réalisée à l'aide d'un montage de chauffage à reflux. Le ballon bicol contient la bromoadénine et la benzylamine.

6. Le sodium solide est un puissant réducteur, il doit être utilisé en milieu rigoureusement anhydre sous peine d'être oxydé par l'eau lors d'une réaction violente.



Sous forme de corps simple, le sodium a un nombre d'oxydation $no_f(Na)=0$. Dans $NaNH_2$ il a un nombre d'oxydation $no_f(Na)=+1$ il a donc été oxydé. La molécule (VII) est donc réduite.



2. Décomposition de la lumière des étoiles

8. Cette gravure représente Newton en train de réaliser la décomposition de la lumière blanche du Soleil à l'aide d'un prisme.

9.a. Pour réaliser cette expérience en TP, il faut :

- Une source de lumière blanche thermique (ampoule à incandescence)
- Une fente source
- Une lentille convergente
- Un prisme en verre dispersif
- Un écran blanc

9.b.

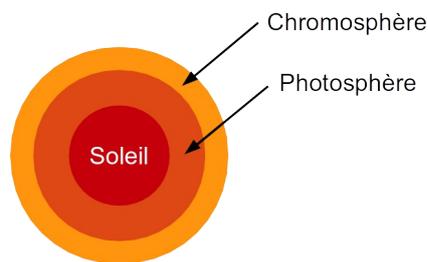
Source de lumière	Fente source	Lentille convergente	Prisme	Écran

9.c. Les compétences qui peuvent être travaillées lors de cette activité sont :

- Savoir qu'un corps chaud émet un rayonnement continu, dont les propriétés dépendent de la température.

- Utiliser un système dispersif pour visualiser des spectres d'émission et d'absorption et comparer ces spectres à celui de la lumière blanche.
- Interpréter qualitativement la dispersion de la lumière blanche par un prisme

10.a. Le fond lumineux continu est dû à la photosphère du Soleil constitué de gaz chaud et dense. Les raies d'absorption sont dues aux éléments chimiques contenus dans la chromosphère du Soleil composé de gaz diffus.



10.b. Problématique possible :

- Quelle est la composition chimique de la photosphère du Soleil ?

Type d'activité :

- Activité expérimentale en demi-classe, travail en binôme.

Prérequis :

- Savoir ce que sont ses spectres d'émission et d'absorption. Savoir reconnaître des spectres thermiques et de raies.
- Savoir qu'un spectre de raies est caractéristique d'une espèce chimique et que les raies sont repérées par leur longueur d'onde.

Documents à disposition :

1. Schéma de la composition externe d'une étoile et caractéristiques
2. Méthode de construction et d'utilisation d'une droite d'étalonnage
3. Notice du tableur-grapheur Régressi.
4. Spectre du Soleil et de l'argon (figure 8)
5. Tableau avec les principales raies des éléments chimiques courants
6. Aide ponctuelle sur papier (sur demande de l'élève)

Proposition de correction :

Les raies d'absorption sont dues aux gaz présents dans la chromosphère du Soleil et qui absorbent une partie de la lumière émise par la photosphère.

Sur Régressi, on trace la courbe d'étalonnage $\lambda = f(\delta)$ à l'aide du spectre de l'argon et on détermine graphiquement, en utilisant les curseurs, la longueur d'onde correspondant aux raies du soleil d'abscisses $\delta_1, \delta_2, \dots$. On obtient :

n° de raie	δ en cm.	λ en nm	n° de raie	δ en cm.	λ en nm
1	0,19	392,4	9	7,98	490,6
2	0,48	396,1	10	8,29	494,5
3	1,5	408,9	11	8,59	498,2
4	2,49	421,4	12	9,98	515,8

5	3,39	432,7	13	10,78	525,8
6	3,79	437,8	14	11,28	532,1
7	5,99	465,5	15	11,59	536,0
8	7,58	485,5			

Il faut identifier chacune des raies avec celle du tableau 3.

Entité	Longueurs d'onde des raies (en nm)				
H	410	434	486,1	656,3	
Na	589	589,6			
Mg	470,3	516,7			
Ca	422,7	458,2	526,2	527	
Ca ²⁺	393	396,8			
Fe	438,3	489,1	491,9	495,7	532,8
Ti	466,8	469,1	498,2		
Mn	403,6				
Ni	508				

Conclusion : La chromosphère du Soleil contient, entre autres, de l'hydrogène, du magnésium, du calcium et l'ion calcium II, du fer et du titane.

3. Réalisation d'un spectre à l'aide d'un réseau de diffraction

3.1. Diffraction par une fente

11. L'importance du phénomène de diffraction dépend de la largeur b de la fente. Plus elle est faible et plus la lumière est diffractée.
12. Il n'y a diffraction que si la longueur caractéristique de l'objet diffractant (largeur ou hauteur de la fente) est faible devant la longueur d'onde de la lumière diffractée. Ici $b \ll \lambda$ mais $L \gg \lambda$ donc il n'y aura diffraction que selon (Ox) .
13. Le maximum de luminosité est obtenu pour $\theta = i$ ce qui correspond à la position de l'image géométrique de la fente pour laquelle il n'y a pas de dispersion de la lumière.
14. Dans les conditions de Fraunhofer (à l'infini) la largeur angulaire de la tache centrale de diffraction vaut : $\alpha \approx \tan(\alpha) = 2 \cdot \lambda / b$

3.2. Utilisation d'un réseau par transmission

15. $\delta_{O_k, O_{k+1}} = I_k O_{k+1} - O_k J_k = a \cdot \sin(i) - a \cdot \sin(\theta)$

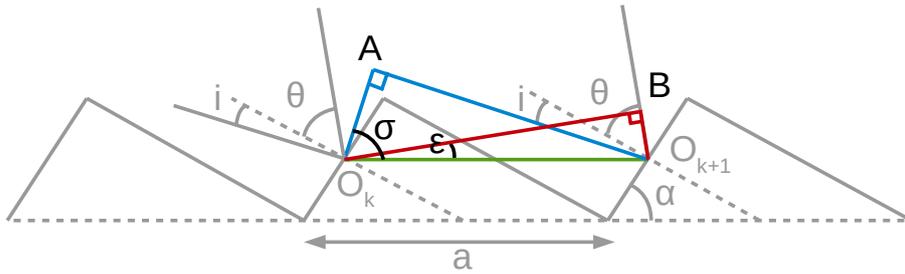
Le déphasage correspondant vaut : $\phi = \delta_{O_k, O_{k+1}} \times \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot a}{\lambda} (\sin(i) - \sin(\theta))$

16. Les ondes interfèrent de manière constructive s'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $\phi = p \cdot 2\pi$.
D'où la relation fondamentale des réseaux : $p \cdot \frac{\lambda}{a} = \sin(i) - \sin(\theta)$
17. Les maxima principaux sont associés aux ordres $p = \dots -2, -1, 0, +1, +2 \dots$ et correspondent aux endroits auxquels les interférences sont constructives. Ces maxima sont contenus dans un large pic de diffraction.
18. En différenciant la formule des réseaux de (16) il vient : $d\theta \cdot \cos(\theta) = \frac{p}{a} \cdot d\lambda$
On en déduit : $D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{p}{a \cdot \cos(\theta)}$
19. Plus l'ordre d'interférence est élevé et plus le pouvoir dispersif est élevé. En revanche, la luminosité sera plus faible.
20. Dans la formule de (18) on peut considérer que pour une petite variation $\Delta\theta$ alors $\cos(\theta)$ il vient : $\Delta\theta = \frac{p}{a \cdot \cos(\theta)} \Delta\lambda$
21. D'après la figure 12, la demie largeur d'un pic correspond à un déphasage $\delta\phi = \frac{2\pi}{N}$.
Or, en différenciant (15) il vient : $\delta\phi = \frac{2\pi \cdot a}{\lambda} \cos(\theta) \delta\theta$.
En égalisant ces deux relations on obtient : $\delta\theta = \frac{\lambda}{a \cdot N \cdot \cos(\theta)}$.
22. Critère de Rayleigh : deux pics d'intensité sont séparables à condition que l'écart angulaire entre ces 2 pics soit supérieur à la demie largeur du plus large de ces pics (dans ce cas le premier minimum du pic le plus large correspond au maximum du second pic).
À la limite de résolution on a : $\Delta\theta = \delta\theta$
23. À la limite de résolution $\Delta\theta_{\min} = \delta\theta$, d'après (20) et (21) il vient :
$$\frac{p}{a \cdot \cos(\theta)} \Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{a \cdot N \cdot \cos(\theta)}$$

On en déduit : $P_{\text{système}} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} = Np$
24. Pour l'ordre 1, le pouvoir de résolution du réseau est : $P_{\text{système}} = N = 530 \times 26 = 13780$. Le pouvoir de résolution du spectrographe ELODIE vaut 45 000 soit environ 3 fois plus. Le réseau disponible au lycée a une résolution suffisante s'il est utilisé à l'ordre 3 ou plus. En revanche le spectre obtenu sera peu lumineux.

3.3. Le spectrographe de l'observatoire de Haute Provence

25.



On a : $\sigma = \alpha + i$, $\epsilon = \alpha + \theta$ et $\sin(\sigma) = \frac{AO_{k+1}}{O_k O_{k+1}} = \frac{AO_{k+1}}{a}$, $\sin(\epsilon) = \frac{BO_{k+1}}{O_k O_{k+1}} = \frac{BO_{k+1}}{a}$.

Le déphasage correspondant vaut : $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (AO_{k+1} + BO_{k+1}) = \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot (\sin(\alpha + i) + \sin(\alpha + \theta))$

26. Pour une observation optimale il faut que le détecteur soit placé en $\theta = i$.

27. Si $\theta = i = 0^\circ$ alors (25) donne : $\phi = \frac{4\pi a}{\lambda} \cdot \sin(\alpha) = 2 p_0 \pi$

Soit $p_0 = \frac{2a}{\lambda} \cdot \sin(\alpha) \neq 0$

Contrairement au réseau à transmission, l'ordre en $\theta = 0^\circ$ n'est pas nul.

28. Le réseau blazé permet de concentrer un maximum de lumière dans un ordre non nul et pour lequel la lumière est dispersée.

29. En utilisant (27) il vient :

$$p_{0,\min} = \frac{2a}{\lambda_{\max}} \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{32 \cdot 10^3 \times 690 \cdot 10^{-9}} \cdot \sin(75^\circ) = 90$$

$$p_{0,\max} = \frac{2a}{\lambda_{\min}} \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{32 \cdot 10^3 \times 390 \cdot 10^{-9}} \cdot \sin(75^\circ) = 160$$

30. $P_{\text{réseau}} = pN = 160 \times 31 \times 408 = 2,0 \cdot 10^6$

31. $P_{\text{fibre}} = 2 \cdot \frac{|f'|}{d} \tan(\alpha) = 2 \times \frac{750 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 10^{-6}} \tan(75^\circ) = 5,6 \cdot 10^4$

Comme $P_{\text{fibre}} < P_{\text{réseau}}$, la résolution du spectrographe ELODIE est limité par la fibre optique.

4. Analyse du spectre d'absorption des étoiles

4.1. Effet Doppler

32. Supposons que l'émetteur émet des « bips » à la fréquence $f_{\text{em}} = 1/T_{\text{em}}$ et que le récepteur, à l'instant $t_0 = 0$ s , se situe à une distance d de l'émetteur. Il s'en éloigne à la vitesse v .

- À l'instant $t_0 = 0$ s l'émetteur émet un premier bip, le récepteur le reçoit à l'instant t_1 .

On a $t_1 \times c = d$ soit $t_1 = d/c$.

- À l'instant $t_2 = T_{em}$ l'émetteur situé à la distance $d + v \cdot t_2$ émet un second bip, le récepteur le reçoit à l'instant t_3 .

On a $(t_3 - t_2) \times c = d + v \cdot t_2$ soit $t_3 = d/c + v/c \cdot T_{em} + T_{em}$.

La période T_0 de réception du signal vaut $T_0 = t_3 - t_1 = T_{em}(1 + v/c)$

La fréquence associée est : $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{f_{em}}{1 + v/c} \approx f_{em} \times (1 - v/c)$ ie $\frac{f_{em} - f_0}{f_{em}} = \frac{v}{c}$

$$33. \quad V_{\max} = \frac{d_4 - d_3}{t_4 - t_3} = \frac{3,37 \cdot 10^{-2} - (-8,37 \cdot 10^{-2})}{0,033} = 3,56 \text{ m.s}^{-1}$$

D'après (32) on en déduit : $\Delta f_{\max} = 4 \cdot 10^3 \times \frac{3,56}{340} = 41,9 \text{ Hz}$.

Ce décalage en fréquence peut être mesuré en faisant apparaître le signal détecté par le microphone directement sur un oscilloscope.

34. Proposition de contextualisation : Un astrophysicien cherche à évaluer la vitesse radiale d'une étoile lointaine dont il connaît la composition chimique. Proposez une méthode qui lui permettra d'évaluer la vitesse de cette étoile. En faisant une analogie entre onde lumineuse et onde sonore, proposez un montage qui permettra de réaliser une mesure analogue à celle que pourra accomplir l'astrophysicien.

4.2. Analyse du mouvement d'un système à deux corps

35. En appliquant la deuxième loi de Newton, il vient : $m_p \frac{d\vec{v}}{dt} = -G \frac{m_p \cdot m_E}{r^3} \vec{r}$

36. Le référentiel R^* est défini comme suit :

- ses 3 axes sont identiques à ceux du référentiel R_0 (défini par 3 étoiles fixes)
- son origine est le barycentre des masses m_E et m_p

Le système $\{E+P\}$ de masse $M = m_E + m_p$ a pour centre de gravité G . Ce système est isolé, il ne subit aucune force. En appliquant la deuxième loi de Newton au point G on obtient :

$$(m_p + m_E) \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{v}_G = c\vec{s}t_e$$

Dans R_0 , le mouvement de G origine de R^* est donc rectiligne uniforme. R^* est donc galiléen.

37. D'après la définition de G on a : $m_p \cdot \vec{GP} + m_E \cdot \vec{GE} = \vec{0}$

En posant $r_E^* = GP$ et $r_p^* = GE$ on obtient : $m_p \cdot r_p^* = m_E \cdot r_E^*$

38. $\vec{r} = \vec{EP} = \vec{EG} + \vec{GO} + \vec{OG} + \vec{GP} = \vec{r}_p^* - \vec{r}_E^*$

Posons M tel que $\vec{GM} = \vec{r} = \vec{r}_p^* - \vec{r}_E^*$

On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \vec{GM}}{dt^2} &= \frac{d^2 \vec{r}_P^*}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_E^*}{dt^2} \\ &= \frac{1}{m_P} \left(-G \cdot \frac{m_E \cdot m_P}{r^3} \vec{r} \right) - \frac{1}{m_E} \left(G \cdot \frac{m_E \cdot m_P}{r^3} \vec{r} \right) \\ &= \left(\frac{1}{m_E} + \frac{1}{m_P} \right) \cdot \left(-G \frac{m_E m_P}{r^3} \vec{r} \right)\end{aligned}$$

En posant $\begin{cases} \mu = \frac{m_E m_P}{m_E + m_P} \\ \vec{GM} = \vec{r}_P^* - \vec{r}_E^* \\ \vec{F}(\vec{r}) = -G \cdot \frac{m_E \cdot m_P}{r^3} \vec{r} \end{cases}$ on obtient $\mu \frac{d^2 \vec{GM}}{dt^2} = F(\vec{r})$.

L'étude du mouvement de P par rapport à E dans R_0 peut être ramené à l'étude de M dans R^* .

E ● G ●

P ● M ●

39. Dans R_0 P décrit une orbite circulaire autour de E. Dans R^* M décrit donc une orbite circulaire autour de G donc E décrit également une orbite circulaire autour de G dans R^* .

40. Le mouvement de P autour de E s'identifie au mouvement de M autour de G.

Dans R^* , l'accélération de M vaut : $\frac{d^2 GM}{dt^2} = \frac{-v_G^2}{GM} = \frac{F(\vec{r})}{\mu}$ avec $GM=r$

Donc $v_G = \sqrt{G \frac{(m_E + m_P)}{r}}$ et $T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_G} = 2 \pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot (m_E + m_P)}}$

41. Si $m_E \gg m_P$ alors $T = 2 \pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_E}}$.

On retrouve la troisième loi de Kepler : « le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi-grand axe de son orbite. »

4.3. Détection de la première planète extrasolaire par la méthode des vitesses radiales

42. Le vecteur rotation de la planète vaut : $\vec{\Omega} = \omega \cdot \vec{u}_\perp$ et sa vitesse vaut $\vec{v}_E^* = \vec{\Omega} \wedge \vec{GE}$

$$\vec{v}_E^* = \omega \cdot \begin{pmatrix} -\cos i \\ 0 \\ \sin i \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} GE \cdot \sin i \cdot \sin \theta \\ GE \cdot \cos \theta \\ GE \cdot \cos i \cdot \sin \theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta = \omega \cdot t + \phi_0$$

La composante suivant \vec{u}_x de ce vecteur vaut : $\vec{v}_r(t) = \vec{v}_E^* \cdot \vec{u}_x = GE \cdot \omega \cdot \sin i \cdot \sin \theta$. En posant

$$\theta = \omega \cdot t + \phi_0 \text{ et } V_0 = GE \cdot \omega \cdot \sin i = v_e^* \cdot \sin i \text{ on obtient } \vec{v}_r(t) = V_0 \cdot \cos \theta$$

43. Il est possible de déterminer la vitesse radiale de l'étoile $v_r(t)$ à l'aide du décalage spectrale des raies d'absorption du spectre de l'étoile.
44. Il faut tenir compte du décalage spectrale dû au mouvement de la Terre (rotation sur elle-même et révolution autour du Soleil) et qui induit une variation de la vitesse radiale de l'étoile.
45. D'après (39) l'étoile « 51 Peg » décrit un cercle autour du centre de masse du système à la vitesse v_E^* . On en déduit : $T = 2\pi r_E^* / v_E^*$

46. Calcul du rayon de l'orbite :

D'après (41) $T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_E}}$ avec $r = EP$ le rayon de l'orbite de la planète.

$$\text{Soit : } r = \left(\frac{T^2 \cdot G \cdot m_E}{4\pi^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{(4,23 \times 24 \times 3600)^2 \times 6,67 \cdot 10^{-11} \times 1,06 \times 1,99 \cdot 10^{30}}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 7,81 \cdot 10^9 \text{ m}$$

Calcul de la masse minimale :

D'après (37) $m_p \cdot r_p^* = m_E \cdot r_E^*$. L'équation de (45) devient : $T = \frac{2\pi \cdot m_p \cdot r_p^*}{m_E \cdot v_E^*}$

En utilisant $V_0 = v_E^* \cdot \sin i$ et $r_p^* \approx r$ car $m_E \gg m_p$ il vient :

$$m_p \cdot \sin i = \frac{T \cdot m_E \cdot V_0}{2\pi \cdot r} = \frac{4,23 \times 24 \times 3600 \times 1,06 \times 1,99 \cdot 10^{30} \times 57,3}{2\pi \times 7,81 \cdot 10^9} = 9,00 \cdot 10^{26} \text{ kg}$$

47. Si $\sin i \approx 1$ alors l'équation précédente donne :

$$\frac{m_E}{m_p} = \frac{2\pi \cdot r}{T \cdot V_0} = \frac{2\pi \times 7,81 \cdot 10^9}{4,23 \times 24 \times 3600 \times 57,3} \approx 2300$$

L'hypothèse $m_E \gg m_p$ était justifiée.

48. Si $\sin i \approx 1$ alors la masse de « 51 Peg b » vaut environ la moitié de celle de Jupiter, mais elle est 100 fois plus proche de son étoile que Jupiter ne l'est du Soleil, elle est donc plus chaude.
49. D'après la figure 19 : $\delta v_r \approx 10 \text{ m.s}^{-1}$
50. Notons m_s la masse du Soleil et m_T la masse de la Terre.

$$\text{D'après (26) } V_{0,\max} = \frac{2\pi \cdot r \cdot m_T}{T \cdot m_s} = \frac{2\pi \times 150 \cdot 10^9 \times 5,97 \cdot 10^{24}}{365 \times 24 \times 3600 \times 1,99 \cdot 10^{30}} = 9,0 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}.$$

$V_{0,\max} \ll \delta v_r$, cette valeur est beaucoup trop faible pour être détectée par ELODIE.

4.4. Étude du système planétaire HD134987

51. La figure 20 fait apparaître 2 périodicités dans les variations de la vitesse radiale de l'étoile « HD134987 ». Ces deux périodicités T_1 et T_2 sont associées à deux astres orbitant autour de cette étoile et qui font varier sa vitesse radiale avec des amplitudes v_{r1} et v_{r2} .

$$\text{Graphiquement on évalue : } \begin{cases} T_1 = (2010 - 1996) / 20 = 0,7 \text{ ans} \\ v_{r1} = 50 \text{ m.s}^{-1} \\ T_2 = 10 \times 2 \times T_1 = 12,6 \text{ ans} \\ v_{r2} = 10 \text{ m.s}^{-1} \end{cases}$$

En opérant les mêmes calculs qu'en (46), on obtient :

$$\begin{cases} r_1 = 1,21 \cdot 10^{11} \text{ m} & \text{et} & r_2 = 8,90 \cdot 10^{11} \text{ m} \\ m_{p1,\min} = 3,10 \cdot 10^{27} \text{ kg} & \text{et} & m_{p2,\min} = 1,68 \cdot 10^{27} \text{ kg} \end{cases}$$

5. Étude cinétique de la formation de molécules prébiotiques

52. En utilisant $k_1 = k_2 \cdot [\text{HCN}] \cdot [\text{OH}^-] / [\text{CN}]_{\text{tot}}$, on obtient :

$$k_1 = k_2 \cdot \frac{[\text{HCN}] \cdot [\text{OH}^-]}{[\text{HCN}] + [\text{CN}^-]} \stackrel{f_{[\text{HCN}]}}{=} k_2 \cdot \frac{[\text{OH}^-]}{1 + [\text{CN}^-] / [\text{HCN}]} \stackrel{\times [\text{H}_3\text{O}^+]}{=} \frac{k_2 \cdot k_e \cdot c_0^2}{k_a \cdot c_0 + [\text{H}_3\text{O}^+]}$$

53. D'après (52) : $k_2(100^\circ\text{C}) = \frac{k_1(k_a \cdot c_0 + [\text{H}_3\text{O}^+])}{k_e \cdot c_0^2} = \frac{2,47 \times (10^{-8} + 10^{-10})}{10^{-11,9}} = 1,98 \cdot 10^4 \text{ jour}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{mol}^{-1}$

$$\text{Et : } k_1(100^\circ\text{C}, \text{pH}=8) = \frac{k_2 \cdot k_e \cdot c_0^2}{k_a \cdot c_0 + [\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{1,98 \cdot 10^4 \times 10^{-11,9}}{10^{-8} + 10^{-8}} = 1,25 \text{ jour}^{-1}$$

54. Partant de l'énoncé on obtient $[\text{HCN}]_{\text{tot}} = [\text{HCN}]_{\text{tot},0} \cdot e^{-k_1 \cdot t}$

$$\text{A } t = t_{1/2} \text{ on a } [\text{HCN}]_{\text{tot}} = \frac{[\text{HCN}]_{\text{tot},0}}{2} = [\text{HCN}]_{\text{tot},0} \cdot e^{-k_1 \cdot t_{1/2}}$$

$$\text{On en déduit } t_{1/2}(100^\circ\text{C}, \text{pH}=8) = \frac{\ln(2)}{k_1} = \frac{\ln(2)}{1,25} = 0,555 \text{ jour}$$

55. La loi d'Arrhenius donne $k_2(100^\circ\text{C}) = A \cdot e^{\frac{-E_a}{RT_{100}}}$ et $k_2(0^\circ\text{C}) = A \cdot e^{\frac{-E_a}{RT_0}}$

$$\text{En divisant les deux équations on obtient : } \frac{k_2(0^\circ\text{C})}{k_2(100^\circ\text{C})} = \exp\left(\frac{-E_a}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_{100}}\right)\right)$$

$$\text{Soit : } k_2(0^\circ\text{C}) = 1,98 \cdot 10^4 \times \exp\left(\frac{-7,5 \cdot 10^4}{8,314} \left(\frac{1}{273} - \frac{1}{273 + 100}\right)\right) = 2,81 \text{ jour}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{mol}^{-1}$$

56. $k_1(0^\circ\text{C}, \text{pH}=10) = \frac{k_2 \cdot k_e \cdot c_0^2}{k_a \cdot c_0 + [\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{2,81 \times 10^{-14,9}}{10^{-10} + 10^{-10}} = 1,77 \cdot 10^{-5} \text{ jour}^{-1}$

$$\text{Et } t_{1/2}(0^\circ\text{C}, \text{pH}=10) = \frac{\ln(2)}{k_1} = \frac{\ln(2)}{1,77 \cdot 10^{-5}} = 3,91 \cdot 10^4 \text{ jour}$$

57. Graphiquement on obtient : $t_{1/2}(0^\circ\text{C}, \text{pH}=8) = 2000 \text{ ans} = 7,3 \cdot 10^5 \text{ jour}$

58. Récapitulatif :

- D'après (54) : $t_{1/2}(100^\circ\text{C}, \text{pH}=8) = 0,555 \text{ jour}$
- D'après (56) : $t_{1/2}(0^\circ\text{C}, \text{pH}=10) = 3,91 \cdot 10^4 \text{ jour}$
- D'après (57) : $t_{1/2}(0^\circ\text{C}, \text{pH}=8) = 7,3 \cdot 10^5 \text{ jour}$

On en déduit que :

- À température constante, la vitesse d'hydrolyse de HCN augmente avec le pH.
- À pH constant, la vitesse d'hydrolyse de HCN augmente avec la température.

59. D'après la relation (10) quand le pH augmente alors $[\text{H}_3\text{O}^+]$ diminue et k_1 augmente. La vitesse d'hydrolyse de HCN augmente.

60. À 0°C la réaction d'hydrolyse de HCN est très lente (quelques centaines à quelques milliers d'années). La réaction de polymérisation a donc le temps d'avoir lieu.

6. Des planètes habitables ?

61. D'après la figure 23, pour qu'une planète soit dans la zone habitable de l'étoile Kepler de masse $M = 0,69 \cdot M_{\text{soleil}}$, il faut que son orbite ait un rayon compris entre 0,40 UA et 1,05 UA.

Il va falloir trouver une relation entre la période de transit des planètes devant l'étoile Kepler 62 et le rayon de leur orbite.

Si on considère que les orbites de ces planètes sont circulaires et si on note M_E la masse de l'étoile Kepler 62, la 3^e loi de Kepler donne :

$$\frac{T_i^2}{R_i^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_E} \text{ avec } i \in \llbracket 1,4 \rrbracket \text{ soit } R_i = \left(\frac{G \cdot M_E \cdot T_i^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

Pour $i=1$ la figure 25 donne $T_1 = 5,71 \text{ jour}$ et on en déduit :

$$R_1 = \left(\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 0,69 \times 1,99 \cdot 10^{30} \cdot (5,71 \times 24 \times 3600)^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 8,27 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,0551 \text{ UA}$$

En faisant de même pour les autres planètes, on obtient :

$$\begin{cases} R_1 = 8,27 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,0551 \text{ UA} \\ R_2 = 1,39 \cdot 10^{10} \text{ m} = 0,0926 \text{ UA} \\ R_3 = 1,79 \cdot 10^{10} \text{ m} = 0,119 \text{ UA} \\ R_4 = 6,38 \cdot 10^{10} \text{ m} = 0,425 \text{ UA} \\ R_5 = 1,07 \cdot 10^{11} \text{ m} = 0,716 \text{ UA} \end{cases}$$

Finalement on trouve que seules les deux dernières planètes (Kepler 62 e et Kepler 62 f) sont favorables au développement de la vie telle qu'on la connaît sur Terre.

Remarque : Il est possible d'évaluer le rayon de ces 2 planètes en exploitant la baisse de luminosité de l'étoile Kepler 62 lors de leur transit. La luminosité relative L_r est proportionnelle à la surface apparente de l'étoile on peut écrire :

$$L_r^{\min} = \frac{S_{\text{étoile}} - S_{\text{planète}}}{S_{\text{étoile}}} = 1 - \frac{r_{\text{planète}}^2}{r_{\text{étoile}}^2}$$

Finalement pour Kepler 62e :

$$r_4 = \sqrt{1 - L_r^{\min}} \times r_{\text{étoile}} = \sqrt{1 - 0,9993} \times 0,64 \times 696 \cdot 10^6 = 1,2 \cdot 10^7 \text{ m} = 1,9 \times r_T$$

Et pour Kepler 62f :

$$r_5 = \sqrt{1 - 0,9995} \times 0,64 \times 696 \cdot 10^6 = 1,0 \cdot 10^7 \text{ m} = 1,6 \times r_T$$

Il s'agit donc de 2 exoplanètes de tailles comparables à celle de la Terre.