

## Préambule

Ce document est une proposition de correction d'épreuve du CAPES externe de physique-chimie. Il ne doit pas être considéré comme un modèle de copie à rendre mais plutôt comme une aide à la correction.

Il est possible que quelques erreurs se soient glissées dans cette version. Si vous pensez en avoir trouvé une, merci de me contacter via l'adresse [phy-chim@laposte.net](mailto:phy-chim@laposte.net) ou en flashant le QR-code suivant ;



Si vous appréciez la qualité de ce document vous pouvez me soutenir en effectuant un don en cliquant [ICI](#) ou en flashant le QR-code ci-dessous :



Ce document est mis à disposition gratuitement selon les termes de la Licence Creative Commons : Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International.



## Table des matières

### 2019 – EXPLOITATION D'UN DOSSIER DOCUMENTAIRE : LA PHYSIQUE DANS LA CUISINE

1. De l'huile dans l'eau.....	3
2. La cuisson des pâtes.....	6
3. Le choix d'une plaque de cuisson électrique.....	10

## 1. De l'huile dans l'eau

1. Réponses au QCM :

	a	b	c	d
1.1	X		?	X
1.2	X			
1.3			X	
1.4		X		
1.5			X	

Ambiguïté à la question 1.1 : Sur l'image d'illustration la goutte d'huile semble se détacher du filet d'huile et non de la bouteille. Il faudrait écrire « Avant que la goutte d'huile ne se détache de la bouteille, elle est soumise à l'action mécanique de : ... »

Confusion aux questions 1.2 et 1.5 : dans les 2 cas les élèves semblent confondre vitesse et force et pensent qu'il existe un lien direct entre ces 2 grandeurs.

Activités de remédiation :

- pour la question 1.2 : construire le diagramme interaction-objet de la situation.
- pour la question 1.5 : lâcher une plume puis une bille en acier de masses différentes dans un tube sous vide (tube de Newton). Chronométrer les 2 durées de chute et montrer qu'elles sont quasiment égales aux incertitudes près.

2. Question 2.1 : Appliquons la 2<sup>e</sup> loi de Newton au système  $S = \{\text{goutte d'huile}\}$  dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$$\sum \vec{F} = m \times \vec{a} \text{ or ici la goutte d'huile est en chute libre } \sum \vec{F} = \vec{P} = m \times \vec{g} \text{ donc } \vec{a} = \vec{g}.$$

En projection selon l'axe  $z$ ' $z$  on obtient :  $a_z(t) = g$

Par intégrations successives de l'accélération par rapport au temps on obtient la vitesse

$$v_z(t) = g \times t + v_0 \text{ et la position : } z(t) = \frac{1}{2} \times g \times t^2 + v_0 \times t + z_0.$$

Or ici  $v_0 = 0$  m/s et  $z_0 = 0$  m donc le vecteur position vaut :  $\vec{r} \begin{cases} 1/2 \times g \times t^2 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$

Question 2.2 : On cherche  $v$  lorsque  $z = 1$  m et on sait que  $v = g \times t$ .

Il faut calculer le temps  $t$  pour lequel  $z = 1$  m.  $z = 1/2 \times g \times t^2$  donc  $t = \sqrt{\frac{2 \times z}{g}}$

Finalement :  $v = \sqrt{2 \times z \times g} = \sqrt{2 \times 1 \times 10} = 4,5$  m/s

Question 3.1 : Une onde est la propagation d'une perturbation locale et réversible d'une grandeur physique.

Question 3.2 : Les ondes à la surface de l'eau sont transversales car leur direction de propagation (horizontale) est perpendiculaire à la déformation (verticale) de la surface.

Question 3.3 : L'échelle est de  $30 \text{ cm} / 4 \text{ cm} = 7,5 \text{ cm/cm}$

La distance parcourue par l'onde entre les images n°1 et n°5 vaut :  $d = R = 2 \times 7,5 = 15$  cm.

Le temps séparant ces 2 prises de vue vaut :  $\Delta t = (5 - 1) \text{ images} \times 1,0 \text{ s} / 10 \text{ images} = 0,40$  s

On en déduit la vitesse de propagation de l'onde vaut :  $v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{15}{0,40} = 38 \text{ cm/s} = 0,38 \text{ m/s}$ .

3.

2. Chute dans l'air

La seconde loi de Newton impose que :  $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$   
 Or ici la seule force qui s'applique est  $\vec{P} = m\vec{g}$   
 D'où  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{g}$   
 Alors  $m\vec{a} = m\vec{g}$   
 Soit  $\vec{a} = \vec{g}$  et ici  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  L'accélération  $a$  vaut  $10 \text{ m.s}^{-2}$ .

Donc  $\vec{a} = \begin{cases} 0 \\ -g \end{cases}$   
 Or  $\vec{a} = \begin{cases} dV_x/dt = 0 \\ dV_y/dt = -g \end{cases}$

On intègre pour retrouver le vecteur vitesse.  
 $\vec{v} = \begin{cases} V_x = \text{Cste} \\ V_y = -gt + \text{Cste}' \end{cases}$   
 On recherche à présent les constantes  
 A  $t = 0$ ,  $V_{x0} = 0$  donc  $\text{Cste} = 0$  Soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gt + v \end{pmatrix}$   
 $V_{y0} = \cancel{v}$

On intègre à nouveau pour trouver le vecteur position :  
 $\vec{z} = \begin{cases} x = \text{Cste}'' \\ y = -\frac{gt^2}{2} + \cancel{v}t + \text{Cste}''' \end{cases}$   
 Or à  $t = 0$ ,  $x = 0$  et  $y = \cancel{H}$  d'où  $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{gt^2}{2} + \cancel{v}t + H \end{pmatrix}$

Il faut préciser quel est le système étudié et le référentiel d'étude.

Il manque les unités.  
 $t$  et en s,  $v$  en m/s et  $x$  en m.

La vitesse initiale vaut 0 m/s  
 donc  $v = v_{x0} = v_{y0} = 0$  m/s

La hauteur initiale est nulle :  
 $H = 0$  m

Il nous reste à déterminer l'équation :  
 On a  $y = -\frac{gt^2}{2} + vt + H$   
 $y = -\frac{10 \times t^2}{2} + vt + 1,00$

Or  $v = \frac{d}{t}$  soit :  $y = -\frac{10 \times t^2}{2} + \frac{d}{t} + 1,00$   
 $d = H = 1,00 \text{ m}$  soit  $y = -\frac{10 \times t^2}{2} + \frac{1,00}{t} + 1,00$

2.2.  $y = H$  donc on peut écrire :  
 $1,00 = -\frac{10 \times t^2}{2} + \frac{1,00}{t} + 1,00$   
 $0 = -\frac{10t^2}{2} + \frac{1,00}{t}$   
 $0 = -10t^2 + 1,00$   
 $1,00 = 10t^2$

$2,00 = -10t^2$   
 $-0,2 = t^2$   
 $t = \sqrt{-0,2}$  Impossible qu'une racine soit négative, j'ai dû faire une erreur.

### 3 Des Ondes à la surface de l'eau

3.1. Une onde est un déplacement avec matière au mom, qui se caractérise par une double périodicité, temporelle et spatiale. Elle peut être de plusieurs natures (mécanique, sonore...).

3.2. Les ondes qui apparaissent à la surface de l'eau sont transversales puisqu'elles traversent tout le milieu et ne se propage pas selon une longueur telles les ondes longitudinales.

3.3. On recherche la vitesse de propagation des ondes à la surface de l'eau.

Sur l'image 3 :  $d = 2 \text{ cm}$   
 Sur l'image 5 :  $d = 4 \text{ cm}$   
 Or l'échelle est de :  $4 \text{ cm réelle} \leftrightarrow 30 \text{ cm}$   
 D'où  $2 \text{ cm} \leftrightarrow 15 \text{ cm}$   
 $4,1 \text{ cm} \leftrightarrow 30,75 \text{ cm}$

2 images s'écoulent pour  $30,75 - 15 = 15,75 \text{ cm}$   
 Donc  $2\lambda = 15,75 \text{ cm}$   
 $\lambda = 7,875 \text{ cm}$   
 Or  $v = \frac{d}{t} = \frac{7,875}{t}$

Attention la formule  $v = d/t$  donne la vitesse moyenne. Ici ce que tu notes  $v$  est la vitesse instantanée à l'instant  $t = 0 \text{ s}$ .

Formule à simplifier car  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  et  $x_0 = 0 \text{ m}$ .

Attention les dénominateurs des fractions ne sont pas les mêmes, on ne peut pas les éliminer de cette manière.

Ces plutôt une déformation sans déplacement d'ensemble. Une onde n'est pas forcément périodique (onde de choc, tsunami, ..).

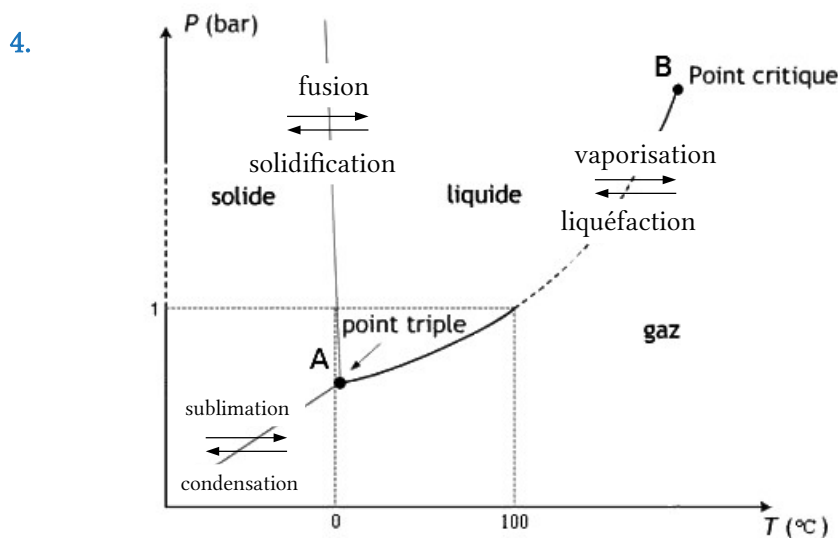
Justification à revoir, il faut dire si la déformation est perpendiculaire ou bien parallèle à la direction de propagation de l'onde.

Attention aux notations. Ici la distance  $d$  parcourue ne correspond pas à la longueur d'onde  $\lambda$  (l'onde n'est pas périodique).

En 1 seconde il y a 10 images soit 1 image toutes les  
 $1,0 \cdot 10^{-1} \text{ s}$ . Ici il y a un écart de  $t = 2 \times 0,1 = 0,2 = 20 \cdot 10^{-3}$   
 $v = \frac{7,875}{20 \cdot 10^{-3}} = 3,9 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$   
 Les ondes se propagent à une vitesse de 3,9 cm par seconde.

Cet élève connaît son cours (loi de Newton, formule de la vitesse moyenne, ...) et les méthodes associées (projection sur les axes, méthode d'intégration, ...). En revanche il peine à appliquer ses connaissances à une situation donnée. Ainsi il choisit des conditions initiales incohérentes et mélange les formules faisant intervenir la vitesse ( $v = dx/dt$ ,  $v=d/t$ ,  $v = \lambda/T$ ). Il a également quelques lacunes en ce qui concerne les méthodes de calcul (manipulation des fractions) mais sait garder du recul en reconnaissant un résultat incohérent.

## 2. La cuisson des pâtes



- 5.
- La présence de 2 ballons permet de prendre la mesure de la température à l'écart de la flamme pour ne pas fausser les mesures. Cela permet aussi de chauffer ou refroidir facilement le montage sans le modifier. Enfin le volume supplémentaire apporté par le second ballon permet de considérer que l'expérience se fait à volume constant en négligeant la variation de volume au niveau du manomètre.
  - Le tube calorifugé assure l'égalité de pression et de température entre les deux ballons.
  - La purge de l'air contenue dans le ballon permet d'obtenir un système diphasique {eau liquide + vapeur d'eau} pour obtenir la courbe de changement d'état de l'eau pure.

Remarque : calcul de la variance du système :

- Nombre de constituants :  $c = 1$  (l'eau)
- Facteurs d'équilibre  $2^* = 2$  (pression + température, le volume est fixé)
- Nombre de phases :  $\varphi = 2$  (1 phase liquide + 1 phase vapeur)

- La variance vaut  $v=c+2^*-\varphi=1+2-2=1$  l'équilibre est monovariant on obtient bien une courbe  $P(T)$ .

6. Comme de nombreux liquides, le mercure contenu dans le thermomètre se dilate lorsqu'il est chauffé. La variation de la hauteur de mercure est alors proportionnelle à la variation de température (sur une plage limitée).

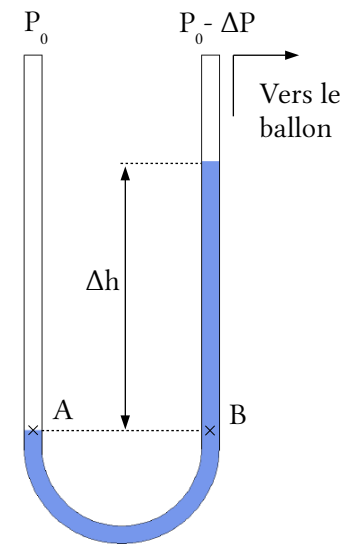
Dans un fluide en équilibre, selon un plan horizontal, la pression est la même partout dans ce plan. Initialement  $P_{\text{ballon}}=P_0$ . Lorsqu'on ferme le robinet R, côté ballon la pression va diminuer d'une valeur  $\Delta P=1-0,6=0,4$  bar et le mercure va monter. Ce dernier va alors descendre d'une hauteur  $\Delta h$  de l'autre côté de manière à contrebalancer cette variation de pression  $\Delta P$ .

Le théorème de l'hydrostatique donne :

$$P_A=P_0 \text{ et } P_B=(P_0-\Delta P)+\rho_{\text{mercure}}\times g\times\Delta h$$

Or  $z_A=z_B$  donc  $P_A=P_B$  soit  $\Delta P=\rho_{\text{mercure}}\times g\times\Delta h$ .

$$\Delta h=\frac{\Delta P}{\rho_{\text{mercure}}\times g}=\frac{-0,6.10^5}{13,6.10^3\times 10}=-0,44 \text{ m}=-44 \text{ cm}$$



L'inconvénient de ce manomètre est qu'il utilise du mercure extrêmement toxique. De plus il faut l'étalonner avant utilisation.

7. Pour la mesure de température : le capteur le plus adapté est le thermocouple Ni-Cr-Ni car sa précision est très correcte (par rapport aux variations à mesurer), son temps de réponse faible (par rapport à la durée de l'expérience) et son étendue de mesure est suffisante.

Pour la mesurer de pression : le capteur de pression absolue est adapté car il est précis, aussi rapide que le capteur de température et son étendue de mesure (0 à 2 bar) est suffisante (contrairement au second capteur).

Paramétrage : Acquisition en mode XY avec la température comme référence, un pas de 1 °C et le plus petit calibre possible (sans saturer). Ce mode permet de ne prendre les mesures que lorsque la variation de température est significative (1 °C) et il s'adapte au temps de l'expérience (inconnue au départ).

Les incertitudes instrumentales sont :

$$UP_{\text{instru}}=0,5\% \times 0,400=0,002 \text{ bar} \text{ et } UT_{\text{instru}}=\frac{75 \times 0,4}{100}=0,3 \text{ °C}$$

En réalité les incertitudes de lecture du graphique l'emportent largement sur les incertitudes instrumentales :  $UP_{\text{lecture}}=0,02 \text{ bar}$  et  $UT_{\text{lecture}}=1 \text{ °C}$

Finalement :  $P_s = (0,40 \pm 0,02)$  bar et  $T = (75 \pm 1)$  °C

8. S'il y a ébullition cela signifie que la pression de vapeur saturante est égale à la pression ambiante :  $P = P_s(91^\circ\text{C}) = 0,70$  bar .

La loi des gaz parfaits donne :  $P \times V = n \times R \times T$  (a)

Le théorème de l'hydrostatique donne :  $P = P_0 - \rho \times g \times z$  (b)

La masse molaire et la masse volumique sont  $M = \frac{m}{n}$  et  $\rho = \frac{m}{V}$  (c) et (c')

La différentielle de (b) :  $dP = -\rho \times g \times dz$  (b')

(b') sur (a) donnent :  $\frac{dP}{P} = \frac{-\rho \times g \times V}{n \times R \times T} \times dz$ , en utilisant (c) et (c') :  $\frac{dP}{P} = \frac{-M \times g}{R \times T} \times dz$

En intégrant cette dernière égalité on obtient :  $\ln(P) - \ln(P_0) = \frac{-M \times g \times z}{R \times T}$

Appliquons la fonction exponentielle pour obtenir :  $P = P_0 \times e^{\frac{-M \cdot g \cdot z}{R \cdot T}}$

- $P_0 = 1013$  hPa est la pression atmosphérique en  $z = 0$  m.
- $M \approx \eta_{O_2} \times M(O_2) + \eta_{N_2} \times M(N_2) = 0,20 \times 16 \times 2 + 0,80 \times 14 \times 2 = 28,8$  g/mol est la masse molaire de l'air.
- $R$  est la constante des gaz parfaits, elle s'exprime en  $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- $T = 273 + 20 = 293$  K est la température (moyenne) de l'air

Remarque : démonstration de l'unité de  $R$

La loi des gaz parfaits donne  $[R] = \frac{[P] \cdot [V]}{[n][T]}$

Or  $[P] = \frac{[F]}{[S]} = [F] \cdot \text{m}^{-2}$  et  $[F] = [m] \times [a] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Finalement :  $[R] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  en USI

En utilisant  $[E] = [m] \times [v^2] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{J}$  on obtient  $[R] = \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

L'équation  $P=f(z)$  permet d'écrire :

$$z = \frac{R \times T \times \ln(P_0/P)}{M \times g} = \frac{8,31 \times (273+20) \times \ln(1013/700)}{0,0288 \times 10} = 3,1 \cdot 10^3 \text{ m}$$

L'internaute réside à une altitude de 3,1 km.

9. Lorsque l'autocuiseur est à altitude  $z_A = 0$  m (niveau de la mer) la soupape se déclenche à une pression intérieure égale à  $P_{A,int} = 1,56$  bar c'est-à-dire pour une surpression entre l'intérieur et l'extérieur égale à  $\Delta P = P_{A,int} - P_{A,ext} = 1,56 - 1,013 = 0,55$  bar .

Pour la suite on suppose que la soupape se déclenche toujours à cette valeur de surpression.

On en déduit la pression à l'intérieur de l'autocuiseur en altitude :



$$P_{A,int} = P_{A,ext} + \Delta P = 0,70 - 0,55 = 1,25 \text{ bar}$$

En extrapolant la courbe du document DR3 lorsque  $P = P_s = 1,25 \text{ bar}$  on en déduit que la température d'ébullition dans l'autocuiseur en altitude vaut  $T_{eb} = T(P = 1,25 \text{ bar}) = 105 \text{ }^\circ\text{C}$ .

#### 10. Correction de l'activité :

1. Un utilisateur de plaque en fonte possède un appareil de forte puissance en fonctionnement mais l'utilise peu, donc il consomme peu d'énergie en 1 an. C'est tout l'inverse pour un utilisateur de plaque à induction et il faut rajouter l'énergie dépensée lors de la veille.

2. L'énergie E en kW.h/an est donnée par la formule :

$$E = P \times \Delta t = P_{veille} \times t_{veille} + P_{utilisation} \times t_{utilisation} \text{ avec } t_{veille} \approx 1 \text{ an}$$

Pour la plaque à induction on obtient :

$$E = 0,018(kW) \times 365 \times 24(h) + 0,588(kW) \times t_{utilisation}(h) = 158(kW \cdot h) + 0,588(kW) \times t_{utilisation}(h)$$

La représentation graphique est une droite d'équation  $y = a \times x + b$  (fonction affine).

Dans ce cas  $y = E$ ,  $x = t_{utilisation}$  et graphiquement on obtient :

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{450 - 160}{500 - 0} = 0,58 \text{ kW} \text{ et } b = y(x=0) = 160 \text{ kW.h ce qui est cohérent}$$

3. Les courbes (A) et (E) se croisent pour  $t_{utilisation} = 256 \text{ h}$  d'utilisation par an. Au-delà il est préférable d'utiliser une plaque à induction plutôt qu'une plaque en fonte.

#### 11. Méthode graphique :

Le foyer utilise ses plaques 400 h/an. D'après le graphique le foyer consomme 470 kW.h/an avec ses plaques en fonte. Il consommerait 400 kW.h/an avec des plaques vitrocéramiques et 300 kW.h/an avec des plaques à induction.

L'amortissement des plaques vitrocéramique se ferait en :

$$N_v = \frac{\epsilon_{v,achat}}{\Delta E_v \times \epsilon_{kWh}} = \frac{250}{70 \times 0,1467} = 24 \text{ ans}$$

L'amortissement des plaques à induction se ferait en :

$$N_i = \frac{\epsilon_{i,achat}}{\Delta E_i \times \epsilon_{kWh}} = \frac{400}{170 \times 0,1467} = 16 \text{ ans}$$

#### Méthode analytique :

Sur N années, le coût d'une plaque en fonte (hors prix d'achat) est :

$$\epsilon_f = P_f \times t_{utilisation} \times \epsilon_{kWh} \times N$$

Le coût d'une plaque vitrocéramique (prix d'achat compris) est :

$$\epsilon_v = \epsilon_{v,achat} + P_v \times t_{utilisation} \times \epsilon_{kWh} \times N$$

Le coût d'une plaque à induction (prix d'achat compris) est :

$$\epsilon_i = \epsilon_{i,achat} + (P_i \times t_{utilisation} + P_{veille} \times 365 \times 24) \times \epsilon_{kWh} \times N$$

L'achat de plaques vitrocéramiques est amorti pour  $N_v$  tel que  $\epsilon_v = \epsilon_f$  :

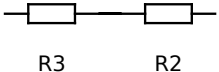
$$N_v = \frac{\epsilon_{v,achat}}{(P_f - P_v) \times t_{utilisation} \times \epsilon_{kWh}} = \frac{250}{(1,161 - 0,999) \times 400 \times 0,1467} = 26 \text{ ans}$$

L'achat de plaques à induction est amorti pour  $N_i$  tel que  $\epsilon_i = \epsilon_f$  :

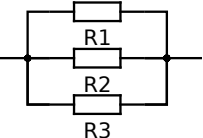
$$\begin{aligned} N_i &= \frac{\epsilon_{i,achat}}{\left( (P_f - P_i) - P_{veille} \times 365 \times 24 \right) \times t_{utilisation} \times \epsilon_{kWh}} \\ &= \frac{400}{\left( (1,161 - 0,588) \times 400 - 0,008 \times 365 \times 24 \right) \times 0,1467} \\ &= 17 \text{ ans} \end{aligned}$$

**Conclusion :** La famille a tout intérêt à remplacer ses plaques en fonte par des plaques à induction plutôt que par des plaques vitrocéramiques, car les premières seront rentabilisées 8 à 9 ans plus tôt.

### 3. Le choix d'une plaque de cuisson électrique

12. Position 2 :   $R_{\acute{e}q2} = R_3 + R_2 = 50 + 80 = 130 \ \Omega$

Position 4 :   $R_{\acute{e}q4} = R_3 = 50 \ \Omega$

Position 6 :   $R_{\acute{e}q6} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3} = \frac{1}{1/150 + 1/80 + 1/50} = 26 \ \Omega$

En utilisant la formule  $P_i = \frac{U_{eff}^2}{R_i}$  on obtient :  $P_2 = \frac{230^2}{130} = 407 \text{ W} \approx 20\% \times P_{max}$

$$P_4 = \frac{230^2}{50} = 1058 \text{ W} \approx 50\% \times P_{max} \qquad P_6 = \frac{230^2}{26} = 2035 \text{ W} \approx P_{max}$$

13. Pour vérifier si toutes les résistances fonctionnent il faut les alimenter en série sur le mode 1.

14. Soit un point M de coordonnées  $(r, \theta, z)$  dans le repère  $O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$  O étant au milieu de la plaque à induction. Le champ magnétique est uniforme et axial selon  $\vec{u}_z$ .

Tout plan contenant M,  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_z$  est un plan de symétrie du champ magnétique donc le vecteur densité de courant  $\vec{j}(M)$  est orthogonal à ce plan : il sera selon  $\vec{u}_\theta$ . Le champ magnétique est invariant selon r et  $\theta$  donc la densité de courant le sera également.

Finalement :  $\vec{j}(M) = j(z)\vec{u}_\theta$

15. La densité de courant j augmente proportionnellement au rayon r.

La densité de courant diminue de manière exponentielle lorsque la hauteur  $z$  augmente, car le champ magnétique est atténué lorsqu'il pénètre dans le conducteur.

$\delta$  est l'épaisseur de peau (= épaisseur de la couche limite) en mètres sur laquelle la valeur du champ magnétique est significative. Au-delà sa valeur, comme celle de la densité de courant est négligeable.

Le terme  $\sin(\omega t - z/\delta)$  décrit l'oscillation alternative du vecteur densité de courant dans le conducteur à la même pulsation  $\omega$  que le champ magnétique et déphasée de  $z/\delta$  à cause du retard de propagation du champ magnétique.

16. La puissance moyenne totale dissipée vaut  $P = \iiint_V \langle p_V(r, \theta, z) \rangle dV$

$$\text{Avec } \langle p_V(r, \theta, z) \rangle = \left\langle \frac{j^2}{\gamma} \right\rangle = \frac{(j_0 \cdot r \cdot e^{-z/\delta})^2}{\gamma} \langle \sin^2(\omega t - z/\delta) \rangle = \frac{j_0^2 \cdot r^2 \cdot e^{-2z/\delta}}{2\gamma}$$

Remarque : Démonstration de  $\langle \sin^2(\omega t - z/\delta) \rangle = 1/2$

$$V_m = \langle \sin^2(\omega t - z/\delta) \rangle = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \sin^2(\omega t - z/\delta) \cdot dt \text{ avec } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

En utilisant  $\sin^2(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2x))$  et  $\int_{0+\phi}^{T+\phi} \cos(x) \cdot dx = 0$  on obtient :

$$V_m = \frac{1}{2T} \left( \int_0^T dt - \int_0^T \cos(2\omega t - 2\frac{z}{\delta}) \cdot dt \right) = \frac{1}{2T} \times [t]_0^T = \frac{1}{2}$$

On en déduit la puissance totale moyenne :

$$P = \iiint_V \frac{j_0^2 \cdot r^2 \cdot e^{-2z/\delta}}{2\gamma} dr \cdot r d\theta \cdot dz = \int_0^R r^3 dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^e e^{-2z/\delta} dz = \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R \times [\theta]_0^{2\pi} \times \left[ -\frac{\delta}{2} \cdot e^{-2z/\delta} \right]_0^e$$

$$\text{Finalement : } P = \frac{j_0^2 \cdot R^4 \cdot \pi \cdot \delta \cdot (1 - e^{-2e/\delta})}{8\gamma}$$

17. Pour le cuivre :

$$j_{0c} = \frac{\mu_{rc} \cdot \gamma_c \cdot \omega \cdot N \cdot B_0}{2} = \frac{1,0 \times 5,9 \cdot 10^7 \times 2\pi \times 25 \cdot 10^3 \times 10 \times 5,0 \cdot 10^{-6}}{2} = 2,3 \cdot 10^8 \text{ A/m}^2$$

$$\delta_c = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \gamma_c \cdot \mu_0 \cdot \mu_{rc}}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi \times 25 \cdot 10^3 \times 5,9 \cdot 10^7 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \times 1,0}} = 4,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$P_c = \frac{j_{0c}^2 R^4 \pi \delta_c (1 - e^{-2e/\delta_c})}{8\gamma_c} = \frac{(2,3 \cdot 10^8)^2 \times (7,0 \cdot 10^{-2})^4 \times \pi \times 4,1 \cdot 10^{-4} \times \left(1 - e^{-\frac{2 \times 5 \cdot 10^{-3}}{4,1 \cdot 10^{-4}}}\right)}{8 \times 5,9 \cdot 10^7} = 3,5 \text{ W}$$

Pour l'acier on fait de même :

$$j_{0a} = 2,3 \cdot 10^9 \text{ A/m}^2, \delta_a = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ m} \text{ et } P_a = 1,1 \cdot 10^3 \text{ W}$$

Seule la puissance dissipée dans l'acier est suffisante pour faire cuire un aliment, les récipients en cuivre, trop bon conducteur, ne peuvent pas être utilisés sur des plaques à induction.